ARTÍCULOS

Revista de **Filosofía**
ISSN: 0034-8244

EDICIONES COMPLUTENSE

http://dx.doi.org/10.5209/RESF.57335

Panofsky: el conflicto entre la perspectiva lineal y la perspectiva angular

Carlos Alberto Cardona[1]

Recibido: 9 de octubre de 2015 / Aceptado: 11 de mayo de 2016

Resumen. Se defiende que el conflicto que advierte Panofsky entre la proposición 8 de la Óptica de Euclides y la Perspectiva Lineal carece de fundamento. Se mostrará que las reglas de construcción perspectiva sugeridas por Piero della Francesca usan las definiciones de Euclides y armonizan sin dificultad la proyección perspectiva y la proposición 8. Si el surgimiento del espacio moderno exige una ruptura con el espacio psicofisiológico, como advierte Panofsky, esta ruptura se debe defender con argumentos distintos al de esgrimir el conflicto aludido.
Palabras claves: apariencia; imagen visual; espacio psicofisiológico; espacio matemático; perspectiva.

[en] Panofsky: The Conflict between Linear Perspective and Angular Perspective

Abstract. The article defends that the conflict suggested by Panofsky among proposition 8 of Euclid's optics and the linear perspective is unfounded. It will be shown that Piero della Francesca's rules of construction perspective used the definitions of Euclid and harmonize without difficulty the projection perspective and proposition 8. Therefore, if the emergence of modern space requires a break with Psychophysiological space, as suggested by Panofsky, this breakdown has to be defended with different arguments.
Keywords: appearance; visual image; psychophysiological space; mathematical space; perspective.

Cómo citar: Cardona, C. A. (2017): "Panofsky: el conflicto entre la perspectiva lineal y la perspectiva angular", en *Revista de Filosofía* 42 (2), 211-228.

[1] Universidad del Rosario, Bogotá - Colombia
carlos.cardona@urosario.edu.co

1. Introducción

Erwin Panofsky en su soberbia obra *La perspectiva como forma simbólica* formuló una inesperada evaluación del origen y alcance de la perspectiva lineal. Lejos de provocar consenso alguno, la obra de Panofsky ha suscitado las más variadas reacciones. Inspirado en la filosofía de E. Cassirer, Panofsky sugiere que los principios de la perspectiva lineal no sintetizan los principios o leyes de la percepción tal y como ella se da. Muy a nuestro pesar, tales principios –los de la perspectiva lineal– sintetizan, más bien, formas convencionales de aprehender u organizar nuestra experiencia perceptual. La evaluación que hace Panofsky del descubrimiento (¡?) de la perspectiva lineal se puede seguir con atención a partir de la conclusión que el autor resume en los siguientes términos:

> No sólo el arte se elevaba a «ciencia» (para el Renacimiento se trataba de una elevación): la impresión visual subjetiva había sido racionalizada hasta tal punto que podía servir de fundamento para la construcción de un mundo empírico sólidamente fundado y, en un sentido totalmente moderno, «infinito» […] Se había logrado la transición de un espacio psicofisiológico a un espacio matemático, con otras palabras: la objetivación del subjetivismo. (2003, p. 48)

La invención o descubrimiento de la perspectiva lineal supone, entonces, un paso en la tarea de racionalizar la impresión visual. Este paso se advierte como una condición previa para la construcción del espacio infinito que ha de servir de trasfondo para la ciencia moderna. Ahora bien, esta construcción no se logra sin sacrificio alguno; se requiere abandonar el espacio psicofisiológico[2] para instaurar como sustituto un espacio matematizado. Así entonces, los principios de la perspectiva lineal no pueden leerse como el reconocimiento de los principios de la visión natural –principios aplicables al espacio psicofisiológico–, sino como una reacción airada que nos conduce a darle la espalda al espacio psicofisiológico para abrazar con optimismo una especie de espacio matemático que, en principio, debía resultarnos ajeno. El espacio propio de la percepción natural debe ser puesto en cuestión para erigir el espacio matemático que demanda la ciencia moderna. Los principios de la óptica de Euclides, defiende Panofsky, resumen las propiedades del espacio psicofisiológico, mientras que los principios de la perspectiva lineal, desarrollada en el Renacimiento, ofrecen un eslabón intermedio entre el espacio psicofisiológico y el espacio matemático propio de la ciencia moderna.[3] La perspectiva lineal debe erigirse, según el autor, desmontando la proposición 8 de la óptica de Euclides. Me propongo mostrar que la perspectiva lineal no se encuentra necesariamente en conflicto con la proposición 8 y que, en contra de los señalamientos que ha hecho Panofsky, teóricos del Renacimiento como Piero della Francesca lograron incorporar sin conflicto alguno las demandas de Euclides y las reglas de proyección pictórica. En la primera parte del artículo presento la base de la argumentación de Panofsky

[2] Este término refiere a la estructura que subyace al campo visual. Esta estructura es la que se encuentra como residuo después de abstraer el continuo de experiencias naturales con el mundo físico, mundo que opera a la manera de trasfondo o medio ambiente.

[3] Panofsky conjetura que hay un conflicto entre la perspectiva lineal y la proposición 8 de Euclides en 2003, p. 19. En la misma página defiende el autor que los teóricos del Renacimiento cuando parafrasean a Euclides, o bien suprimen el teorema 8 o lo enmiendan de tal modo que pierde su sentido originario.

y en la segunda parte ofrezco el argumento central de la construcción perspectiva desarrollado por Piero della Francesca en su *Prospectiva pingendi* y muestro que no existe el conflicto señalado por Panofsky.

2. El conflicto advertido por Panofsky

Considero que el argumento que le permite a Panofsky defender su conjetura tiene cuatro fases. Presentaré en forma muy breve las fases que creo entrever.[4]

Primera fase –Caracterización de un espacio racional. Panofsky reconoce que el denominado por él *Espacio Racional* ha de ser un espacio infinito, constante y homogéneo. En el espacio matemático puro no reconocemos limitación alguna. En ese sentido, dicha estructura debe aparecernos como sin límites (infinita). Ahora bien, la percepción natural, cree Panofsky, desconoce esta carencia de límites. La percepción natural está atada a los límites de la facultad perceptiva. No podemos ver con seguridad más allá de ciertos límites naturales. Euclides, por ejemplo, sugiere en la proposición 3 de su Óptica que para cada objeto podemos concebir una distancia de separación del observador a partir de la cual ya no es posible una percepción clara.[5] De otra parte, que el espacio matemático sea homogéneo significa que sus elementos, a saber los puntos individuales, tan sólo señalan posiciones potenciales. No hay forma de asignarle contenido alguno a los puntos. Ningún punto se diferencia de otro por razones sustanciales; se diferencia sólo en virtud de las relaciones de lugar que guarda con otros puntos. El espacio de la percepción natural (el espacio psicofisiológico) carece de la pretendida homogeneidad, toda vez que las diferenciaciones arriba-abajo, derecha-izquierda, adelante-atrás imponen la marca característica de nuestras aprehensiones visuales y táctiles: de cada punto potencialmente visible se puede advertir en el campo visual si está, si está arriba, abajo, en frente, detrás, etc. En ese orden de ideas, el reconocimiento de direcciones privilegiadas impone una negación de la homogeneidad. Finalmente, dado que los puntos, como unidades irreductibles del espacio matemático, carecen de toda determinación diferente de las relaciones de ubicación con respecto a otros, no se da en ellos devenir que modifique propiedad sustancial alguna. En eso se resume la constancia advertida en el espacio matemático. Ahora bien, dado que el contenido perceptual asociado con las nociones de arriba-abajo, derecha-izquierda, delante-detrás, cerca-lejos cambia en la medida en que vemos con dos ojos fijos en una cabeza que se desplaza y gira provocando con ello variaciones cinestésicas que covarían con las modificaciones en el campo visual, advertimos que no hay nada constante en el espacio psicofisiológico.

En síntesis, el espacio matemático puro es infinito, constante y homogéneo, en tanto que el espacio psicofisiológico es limitado, cambiante y anisotrópico. Así entonces, si hemos de concebir un espacio matemático puro como requisito primordial para constituir la ciencia moderna, debemos construirlo desmontando las

---

4 Panofsky no presenta su conjetura en las cuatro fases que aquí propongo. No obstante, el lector puede constatar las bondades de la división propuesta si sigue estas referencias en la obra del autor: fase 1, en pp. 12-14; fase 2, en pp. 15-20; fase 3, en pp. 21-28; fase 4, en pp. 29-54.

5 La pretendida demostración de Euclides no se apoya en las definiciones, tampoco lo hace en las proposiciones previas. De ello se puede inferir que dicho teorema ofrece, más bien, una conjetura elevada a la condición de hipótesis de trabajo o, incluso, un axioma. Este enunciado es útil para demostrar la proposición 9 que, a su vez, es utilizada con mucha fuerza por Panofsky.

propiedades del espacio natural para construir, a partir casi de cero, un nuevo espacio abstracto. Panofsky sostiene que al erigir los principios de la perspectiva lineal como si fueran también principios de la percepción, se produjo un primer intento por prefigurar un espacio infinito, constante y homogéneo.[6] Para ello la perspectiva lineal debe presuponer dos hipótesis fundamentales: (i) cada uno de nosotros contempla el mundo con un único ojo inmóvil y (ii) la imagen visual que contemplamos se asemeja en todos sus detalles a la imagen que se captura en la intersección de un plano con la pirámide visual que encuentra en el único ojo inmóvil su vértice.

Panofsky conjetura que existe un conflicto básico entre la imagen física que parece servir de correlato del espacio percibido en forma efectiva y la imagen que sirve de paradigma para la construcción de la perspectiva lineal. Así las cosas, mientras la imagen retínica se recoge en una superficie cóncava, en el mejor de los casos esférica, la imagen que presupone la perspectiva lineal se recoge en una superficie plana. El sensorio natural se encuentra de frente con un espacio que se curva mientras la perspectiva lineal insiste en ofrecerle una copia plana. En las palabras de Panofsky:

> Mientras la perspectiva plana proyecta las líneas rectas como tales líneas rectas, nuestro órgano visual las toma como curvas (considerándolas como curvas en sentido convexo desde el centro de la imagen); así, una cuadrícula que objetivamente está formada por líneas rectas parece, al ser mirada de cerca, curvarse como un escudo, mientras que una cuadrícula objetivamente curva parece por el contrario plana y las líneas de fuga de un edificio, que en la construcción perspectiva se representan como rectas, deberían ser curvas, correspondiendo a la efectiva imagen retínica. (2003, p. 16)

Segunda fase –Construcción de la geometría del espacio psicofisiológico. Así como la perspectiva lineal establece, a juicio de Panofsky, la primer aproximación hacia la construcción de la geometría para el espacio matemático puro, bien podemos preguntar si existe o se puede construir una geometría para el espacio psicofisiológico. El descubrimiento de la perspectiva lineal hizo evidente la curvatura del mundo visual esférico. Panofsky interpreta las aberraciones marginales como expresión de dicha evidencia. Podemos preguntar ¿es este un descubrimiento tardío, o ya había cierto reconocimiento del hecho en la antigüedad clásica? Panofsky sugiere que tanto los teóricos griegos de la óptica, como los artistas y arquitectos, asumían que lo recto es visto como curvo y lo curvo podría ser visto como recto. Habituados a la curvatura natural del espacio visual, artistas y arquitectos dejaban de advertirla (salvo en circunstancias anómalas). La defensa se asemeja al viejo y clásico argumento de Platón: no oímos la música de las esferas porque estamos habituados a ella. Panofsky se apoya en la proposición 9 de la Óptica de Euclides. Esta proposición reza así: «Las magnitudes rectangulares vistas a distancia parecen redondeadas» (Euclides 2000, p. 144). La defensa que ofrece Euclides procede así: *BT* (Figura 1) es un rectángulo que se encuentra muy alejado; como cada objeto tiene una longitud de

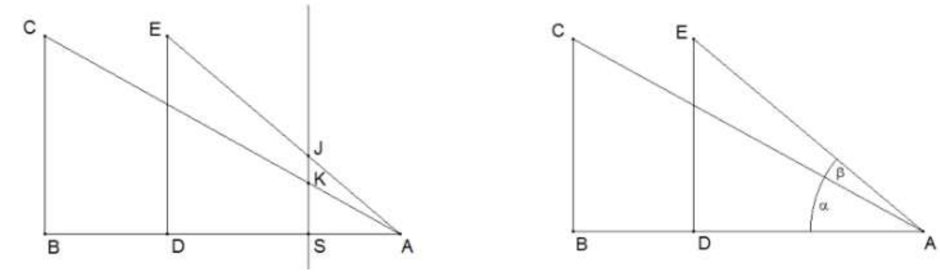
---

[6] Los principios de la perspectiva lineal a los que alude Panofsky son: (i) las ortogonales al plano que interseca la pirámide visual se observan como rectas que convergen a un punto central que se encuentra a la misma altura del observador; (ii) rectas paralelas se observan como si pretendieran reunirse en un punto sobre la línea de horizonte –habrá un punto sobre la línea de horizonte para cada grupo de paralelas–; (iii) la distancia entre el punto central y el punto de convergencia de las paralelas que en el plano de base forman un ángulo de 45^0 con la línea de base es igual a la distancia entre el observador y el velo pictórico; (iv) iguales dimensiones extendidas a lo largo de una ortogonal disminuyen según una proporción compleja.

separación –proposición 3–, es decir una longitud de alejamiento a partir de la cual ya no es visto con claridad, podemos imaginar que el rectángulo está tan alejado que ya no se observa con claridad ninguno de sus vértices; entre tanto, los puntos *D* y *Z*, que se encuentran más cerca, sí son observados con claridad. Este gradiente de visibilidad que se da en las vecindades de los vértices provoca una distorsión que nos lleva a contemplar cierta curvatura. La argumentación de Euclides no es contundente y tampoco se funda en una supuesta curvatura del campo visual como podría servirle a Panofsky.

Figura 1. Euclides, Proposición 9

El núcleo central de la argumentación de Panofsky depende de la interpretación que él le da a la proposición 8 de la Óptica de Euclides. El autor asume que dicha proposición sistematiza un presupuesto básico que la Antigüedad mantuvo firmemente, a saber: «las dimensiones visuales (en tanto proyecciones de las cosas sobre la esfera ocular) no están determinadas por la distancia existente entre los objetos y el ojo, sino exclusivamente por la medida del ángulo visual (de ahí que sus relaciones sean expresadas sólo mediante grados angulares, medidos con exactitud, o mediante arcos de círculo, y no mediante simples medidas lineales)» (Panofsky 2003, p. 19). Panofsky defiende que la proposición 8 de Euclides, que respeta en forma más fina la geometría propia del espacio psicofisiológico, se opone radicalmente a los principios de la perspectiva lineal. La proposición 8 de Euclides afirma: «Las magnitudes iguales y paralelas situadas a distintas distancias del ojo no se ven proporcionalmente a las distancias» (Euclides 2000, p. 142). Panofsky interpreta "magnitud" en la proposición 8 como si fuese sinónimo de "dimensión visual". Así pues, cuando el teórico de la perspectiva lineal afirma que "las dimensiones visuales de un objeto disminuyen en proporción inversa a la distancia del objeto al observador" y sustituye "dimensión visual" por "magnitud" obtiene el enunciado "las magnitudes visuales de un objeto disminuyen en proporción inversa a la distancia del objeto al observador". Así formulada, la declaración entra en clara contradicción con la proposición de Euclides. Veamos ahora en doble columna los presupuestos de la perspectiva lineal y los de la perspectiva angular que se ajustan a las demandas de la proposición 8 de Euclides –Figura 2. Procuraré sacar a la luz el conflicto que advierte Panofsky. Sean *BC* y *DE* dos segmentos congruentes que pueden disponerse a distancias diferentes *AB* y *AD* de un observador *A*. Bajo las expectativas de la perspectiva lineal, las longitudes de las imágenes visuales se contemplan en el corte de un plano con la pirámide visual. Así entonces, las longitudes *BC* y *DE* se contemplan de acuerdo a las longitudes *KS*, la primera, y *SJ*, la segunda. Bajo las expectativas de la perspectiva del espacio psicofisológico, dichos segmentos se comparan a partir de las diferencias angulares α y $\alpha+\beta$.



Perspectiva lineal

$$BC \cong DE\,;\ AB =_{Def} d_1;\ AD =_{Def} d_2$$

$$\frac{KS}{SJ} = \frac{d_2}{d_1}$$

Perspectiva angular

Apariencia de *BC*: α; Apariencia de *DE*: α+β

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} > \frac{d_2}{d_1}$$

Figura 2. Comparación de las perspectivas lineal y angular

En algunos pasajes, Leonardo da Vinci formuló reservas similares a las señaladas por Panofsky. Veamos un ejemplo. Leonardo denomina *Perspectiva Natural* aquella en la que las partes más remotas están obligadas a disminuir más que las partes más cercanas. En oposición a la anterior, Leonardo denomina *Perspectiva Artificial* aquella en la que las partes más remotas están obligadas a disminuir menos que las partes más cercanas. Así entonces, las dos perspectivas se hallan en oposición. Para presentar el contraste entre las dos, Leonardo pide que imaginemos un ojo *h* que contempla tres círculos *a, b, c* de igual diámetro y cuyos centros se encuentran sobre una perpendicular al eje visual que cae sobre el círculo *b* –Figura 3. Desde el punto de vista de la perspectiva artificial concluye Leonardo: «Sea de el plano sobre el cual son vistos tres círculos iguales que están ubicados más allá del plano de, a saber, los círculos a b c. Puedes entonces advertir cómo el ojo h ve sobre el plano vertical las secciones de las imágenes: mayores las que estén a mayor distancia; menores las que están a menor distancia» (1970, § 107, p. 159). Ahora, desde el otro punto de vista, concluye el pintor:

> La perspectiva natural obra de manera contraria, pues a mayor distancia los objetos vistos aparecen más pequeños, y a distancias menores los objetos aparecen mayores […] Y de esta perspectiva, en la que el plano corta las pirámides que conducen imágenes equidistantes al ojo, nos es dada una experiencia similar gracias a la forma curva del ojo sobre la cual las pirámides son cortadas a igual distancia de la facultad visual.» (1970, § 108, pp. 159-160).

En síntesis, si las imágenes se recogen sobre la intersección del plano *de* con las pirámides visuales –Perspectiva Artificial–, los círculos *a* y *c*, que se encuentran más distantes que *b*, aparentarán un mayor tamaño. Al contrario, si las imágenes se recogen sobre el arco *gf* –Perspectiva Natural–, los círculos *a* y *c* aparentarán menor tamaño que el círculo *b,* pues el ángulo de dichas pirámides visuales es menor.[7]

[7] James Elkins ha mostrado cómo interpretar éste y pasajes similares de Leonardo sin presuponer la defensa de

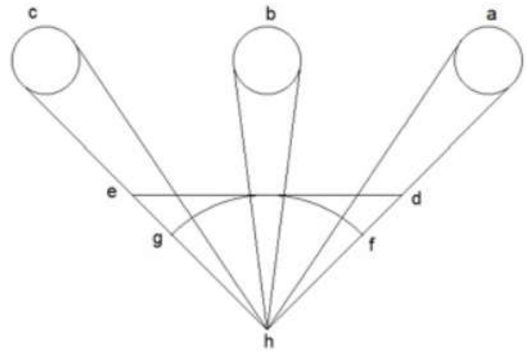


Figura 3. Leonardo, 1970, §§ 107, 108

Tercera fase –Reconocer prácticas artísticas identificadas con la perspectiva propia del espacio psicofisiológico. Panofsky pregunta si la Antigüedad Clásica contaba, así como lo hizo el Renacimiento en relación con la perspectiva lineal, con prácticas artísticas que se mantuvieran fieles a la proposición 8 de Euclides. La respuesta de Panofsky es afirmativa. El autor interpreta así la recomendación de Vitrubio que consiste en curvar algunos elementos arquitectónicos para compensar aberraciones marginales. Panofsky interpreta también el famoso pasaje de Vitrubio, que corrientemente se ha tomado como una anticipación del principio de convergencia de las ortogonales, como si estuviese recomendando una proyección esférica. En este caso las ortogonales no convergen en un único punto, sino que lo hacen por parejas en diversos puntos que terminan alineados en un eje común (Panofsky, 2003, p. 88, n. 11; y p. 22). Así pues, en el caso en el que la interpretación y extrapolación de la conjetura de Panofsky sean correctas, buena parte de las representaciones artísticas de la Antigüedad Clásica debían contar con un eje de fuga en lugar de un punto de fuga central.[8] Panofsky ha mostrado también que si se intenta construir una retícula –similar al piso ajedrezado de Alberti– ajustados al principio de eje de fuga –por oposición a punto de fuga central– no se logran resultados que compitan con el ajedrezado de Alberti o el de Piero della Francesca; en ese caso, aparecen deformaciones inevitables en las proporciones de las cuadrículas efecto que se elimina con las construcciones de Alberti y Piero. En otras palabras: el espacio de las representaciones clásicas es más un espacio concebido como una incontrolada sucesión de figuras que un espacio de relaciones matemáticas de posiciones abstractas. Hay una referencia interesante al principio de convergencia en el comentario que Proclo elaboró a propósito del Primer Libro de los Elementos de Euclides. Es bastante improbable que Alberti supiera de dicho fragmento. Con el ánimo de mostrar cómo es que la óptica se fundamenta en la geometría, anota Proclo: «La primer ciencia [Óptica] usa las líneas visuales y los vértices constituidos por ellas; esta se divide en una parte específicamente llamada óptica, la cual explica la apariencia ilusoria presentada por los objetos vistos a la distancia, tales como la convergencia de las líneas paralelas o la apariencia redondeada de torres cuadradas» (1970, p. 33).

alguna forma de perspectiva curvilínea o angular (1988).

8 A manera de ejemplos véase E. Panofsky, 2003, p. 23, láminas 1b, 2a, 2b.

La representación exitosa de una retícula de ajedrez exigía concentrar la atención en un plano que corta la pirámide visual. Ahora bien, pregunta Panofsky:

> «¿Por qué no se dio ese paso en apariencia tan pequeño, como es lograr la intersección plana de la pirámide visual, que le habría llevado a la construcción de un espacio verdaderamente sistemático y exacto? En verdad esto no podía suceder mientras siguiera siendo válido el axioma de los ángulos mantenido por los teóricos; ¿pero por qué no se denegó su validez entonces, como habría de suceder quince siglos más tarde? No se hizo, porque aquella forma de intuir el espacio, que buscaba su expresión en el arte figurativo, no exigía en absoluto un espacio sistemático, tampoco los filósofos de la Antigüedad podían concebirlo» (2003, p. 27).

Cuarta fase –Señalar los elementos de transición que van desde el espacio psicofisológico al espacio matemático. Panofsky estudia los que, a su juicio, son los pasos que permiten la transición desde la perspectiva angular hasta la perspectiva lineal. El autor se detiene en varias formas de expresión artística propias del Medioevo, analiza qué se conserva de la Antigüedad Clásica y qué se modifica en sus matices.

3. La construcción perspectiva de Piero della Francesca y la denegación del aparente conflicto

Podemos ahora preguntar: ¿hasta qué punto es justificado sostener, como lo hace Panofsky,[9] que la proposición 8 de Euclides se encuentra en conflicto con la perspectiva lineal? De existir el conflicto, éste parece imponer una solución similar a la que encontramos a propósito del desarrollo de geometrías no-euclidianas; a saber: si dos geometrías que pretenden describir lo mismo entrañan un conflicto en sus principios fundantes a pesar de que cada una, a su manera, ofrece una descripción plausible del espacio físico, podemos pensar que la adopción de una u otra es una asunto de mera convención. C. D. Brownson ha ofrecido buenas razones para sostener que no existe el pretendido conflicto (1981). El principio básico en la Óptica de Euclides establece que la apariencia de un objeto es función del tamaño objetivo del mismo y de la distancia desde el objeto hasta el observador. La apariencia ("magnitud") a la que se refiere Euclides se evalúa siempre a partir del ángulo de la pirámide visual que abraza al objeto y tiene en su vértice al punto geométrico que representa al ojo. Brownson pide distinguir la evaluación de la apariencia de la evaluación del tamaño de la imagen visual. En la perspectiva lineal, por su parte, el tamaño de la longitud de la imagen está determinado por un corte plano a la pirámide visual. Así entonces, en la perspectiva lineal se forma una imagen física que es la que provee las medidas de la apariencia del objeto percibido.[10] En la Óptica de Euclides, el tamaño de la apariencia no remite a una imagen física. Richard Tobin adelantó un juicioso estudio etimológico que muestra que en la Óptica de Euclides se distingue entre la recepción

[9] Esta también es la tesis que sostiene John White y que le ha permitido defender la existencia de una perspectiva curvilínea (cfr. J. White, 1949).

[10] Kepler va a llamar a esta imagen física "pintura" para diferenciarla del objeto que contempla la mente al que denomina "imagen" (cfr. J. Kepler, 2000 p. 168). Esta distinción kepleriana fue central para los teóricos modernos: Descartes, Malebranche y Berkeley.

de una imagen en el ojo (όραται) y la apariencia o percepción de la imagen tal y como le aparece al observador (φαίνεται) (1990, pp. 17-23);[11] Tobin también mostró que, por el tipo de traducción que cita Panofsky, este último ha tomado el segundo sentido como si fuera el primero (R. Tobin, 1990, p. 17).

Si Panofsky tiene razón en su declaración, a saber que el método para determinar el tamaño de la apariencia visual sugerido por Euclides está en conflicto con el método propuesto en la perspectiva lineal, entonces la construcción de una pintura basada en los métodos de la perspectiva lineal debe conducir a resultados diferentes a los que se obtienen cuando se usan los principios de Euclides. El estudio de Brownson conduce a notar que Panofsky malinterpretó la proposición 8 de Euclides. Según Brownson tanto un cálculo llevado a cabo a partir de la perspectiva lineal como un cálculo elaborado a partir de los principios de Euclides conducen al mismo resultado para el tamaño de los objetos previstos para una pintura plana –a saber, el tamaño de las imágenes.[12]

Hay, entonces, dos formas diferentes de interpretar "tamaño aparente": en la perspectiva lineal se asume que "tamaño aparente" alude a la longitud de una imagen y en la perspectiva angular se asume que "tamaño aparente" remite a la amplitud del ángulo de visión. Aun cuando el mismo término tiene diferente referencia, no es cierto que produzcan resultados diferentes a la hora de calcular las dimensiones que se anticipan para una escena pictórica concebida en un velo pictórico plano. Citemos, pues, la conclusión de Brownson:

> La óptica de Euclides y la perspectiva lineal son ambas sistemas geométricos que dan cuenta de la presentación de apariencias para un punto de observación fijo. Dado que ambas analizan la "apariencia" únicamente en términos de propiedades geométricas del mismo conjunto de rayos para el ojo, el análisis no tiene por qué entrar en conflicto. Pero las aplicaciones pretendidas de las geometrías son diferentes. La óptica de Euclides está dirigida hacia el estudio de las apariencias relativas de objetos individuales. Su preocupación central es la investigación de cómo es que nosotros vemos […] La perspectiva lineal está diseñada para el uso de pintores. Esta usa una sección cruzada de un cono de visión cuya extensión está determinada primariamente por la extensión de la escena que el artista desea retratar más bien que por las dimensiones de un objeto individual visto. Esta va inmediatamente más allá de la evaluación de la apariencia de un objeto individual para dar igual valor geométrico a sus relaciones espaciales. (1981, p. 192)

Brownson sugiere también que, además de fijarse en el enunciado de una proposición de Euclides, conviene examinar así mismo el tipo de demostración que ofrece el pensador griego. Así, en muchos casos Euclides usa, como elementos de prueba, intersecciones planas en la pirámide visual.[13] En ese orden de ideas, Euclides no parece ser consciente del conflicto que quiere subrayar Panofsky y no ve dificultad alguna en valerse de elementos que parecen propios de la perspectiva lineal.

Animado por la sugerencia de Brownson, pretendo mostrar que Panofsky también se equivoca cuando aduce que los teóricos del Renacimiento suprimen por

---

[11] Se advierte un interesante parecido de familia con la distinción que traza Kepler (ver nota 10).

[12] Cfr. C. D. Brownson, 1981, pp. 185-186.

[13] Véase, por ejemplo, la demostración de la proposición 10.

completo el Teorema 8 o lo enmiendan parcialmente.[14] No es difícil encontrar en Leonardo pasajes que sugieren reservas e incluso diferencias entre la Perspectiva Natural y la Perspectiva Artificial, ya hemos citado algunos de ellos. Sin embargo, Leonardo no es precisamente creativo a propósito de reglas de perspectiva lineal, a diferencia de lo que ocurre con la perspectiva cromática o la perspectiva menguante. Su conocimiento de la perspectiva lineal, aunque no lo cite, alude principalmente a Alberti o a Piero della Francesca. Pretendo mostrar que Piero fundamenta su construcción perspectiva en línea directa con los presupuestos de Euclides. Quiero mostrar, como consecuencia de lo anterior, que la construcción perspectiva de Piero no contradice el resultado presupuesto en la proposición 8 y, más bien al contrario, logra armonizar el resultado de Euclides con las exigencias de la representación en escorzo.

La información que se tiene acerca de la biografía de Piero es demasiado imprecisa y llena de lagunas. El nacimiento debió ocurrir en algún momento entre 1410 y 1420, muy probablemente en la localidad de Borgo San Sepolcro –la misma región en la que nacieron Luca Pacioli y Giorgio Vasari–. A una edad avanzada, como lo sugiere Vasari, Piero empezó a perder paulatinamente la visión. La muerte del artista ocurrió en el año de 1492.

De Piero conocemos tres escritos de matemáticas. El primero *Trattato d'abaco*, pertenece a una serie de escritos que pretendían llevar algunos conocimientos de matemáticas básicas al público en general. El segundo *Libellus de quinque corporibus regularibus*, pone al lector en contacto con los cinco sólidos regulares descritos en los *Elementos* de Euclides y presenta los sólidos que Pappus atribuye a Arquímedes. El tercer y último libro se conoce con el título *De prospectiva pingendi* que puede traducirse como *Acerca de la perspectiva para la pintura*. No hay acuerdo entre los comentaristas acerca del orden que ocupa el tratado en relación con los otros dos, tampoco se sabe a ciencia cierta en qué época fue concebido dicho escrito. El texto fue escrito originalmente en italiano, circunscribiendo así el público objetivo al que estaba dirigido: los jóvenes aprendices del nuevo arte de la pintura. Sin embargo, el título de la obra está recogido en latín, quizá para reclamar para el nuevo saber la dignidad de un saber científico. Piero usa el término *Prospectiva* en lugar del término que hubiese podido ser más corriente *Perspectiva*. En principio se puede pensar que Piero quiere distinguir entre la Perspectiva como la ciencia de la percepción visual en general, para la que perfectamente se había reservando el nombre de *Perspectiva communis*, el título que se le dio a la obra de Pecham, y la Perspectiva como la técnica puesta al servicio de la representación pictórica, para la que se reservó el calificativo de *Perspectiva artificialis*. El escrito de Piero se esmera por tratar de ofrecer un fundamento matemático a las técnicas de representación pictórica. La versión italiana del *De Prospectiva pingendi* de Piero se publicó por primera vez en 1899 en Estrasburgo. En el siglo XX, en el año de 1942, G. Nicco-Fasola preparó una edición crítica de excelente calidad.[15]

El reto de Piero se puede resumir así: exponer un conjunto de reglas pictóricas, junto a su fundamento, de tal manera que podamos hacer trazos sobre un velo

---

14 «Probablemente es por algo y no por pura casualidad que más tarde el Renacimiento, cuando parafrasea a Euclides […], bien suprime totalmente este octavo teorema, bien lo "enmienda" parcialmente, de modo tal que le hace perder todo su sentido originario» (Panofsky, 2003, p. 19)

15 Usaremos la edición de Nico-Fasola (2ª edición) (1984).

pictórico bi-dimensional que creen en un espectador, cuya ubicación con respecto al plano se conoce o se fija claramente con anterioridad, la ilusión de contemplar de primera mano una suerte de realidad tridimensional. Citemos, para empezar, la definición de perspectiva que ofrece el autor en el libro III:

> Digo que la perspectiva literalmente significa las cosas vistas a la distancia, representadas como si estuviesen encerradas en el interior de límites dados [velo pictórico] y en una proporción ajustada a la magnitud de sus distancias, sin cuyo conocimiento nada podría ser degradado correctamente. Y dado que la pintura no es nada sin la demostración de superficies y cuerpos degradados o magnificados sobre el límite [el velo pictórico], ubicados tal y como las cosas reales son vistas por el ojo subtendiendo ángulos diferentes sobre el límite mencionado, y porque para cualquier cantidad, alguna de sus partes se encuentra más cerca del ojo que otras, y la parte más cercana siempre se presenta como si subtendiese un ángulo mayor que las otras en el límite asignado, y dado que no es posible que el intelecto juzgue por sí mismo acerca del tamaño, esto es del tamaño de la parte más cercana y de las otras, Yo digo que es necesario [emplear] la perspectiva, que distingue todas las cantidades proporcionalmente, como una ciencia verdadera, que demuestra la degradación y magnificación de todas las cantidades por medio de líneas. (1984, pp. 128-129)

Quiero subrayar la afinidad de Piero con los preceptos recomendados por Euclides, a saber: las dimensiones y posiciones de un objeto se juzgan a partir del ángulo que subtiende la pirámide visual. El problema original que le interesa a Piero puede formularse en los siguientes términos: dados un cuadrado tendido en el plano de base, un velo pictórico perpendicular a dicho plano y, en una ubicación que se encuentra claramente determinada, un observador al otro lado del cuadrado con respecto al velo, se pide hallar el trapecio que se obtiene como resultado de degradar el cuadrado en el velo pictórico. Hallar el trapecio significa determinar las dimensiones de sus lados, su altura y su particular organización en el velo. Sea, entonces, el cuadrado *BCFG*, con *BC* sobre la línea de base, el velo pictórico perpendicular al plano de base por la recta *BC* y un observador cuya ubicación se establece a partir de la tripleta (d, m, h), se pide determinar las características geométricas del trapecio *BCF'G'* – Figura 4. Determinar las características del trapecio significa hallar: (i) la magnitud del segmento *F'G'*, en adelante x, (ii) la magnitud de la altura *F'F''*, en adelante y, (iii) la magnitud de *BF''*, en adelante z. En otras palabras, hallar las propiedades geométricas del trapecio significa determinar en forma completa la tripleta (x, y, z).

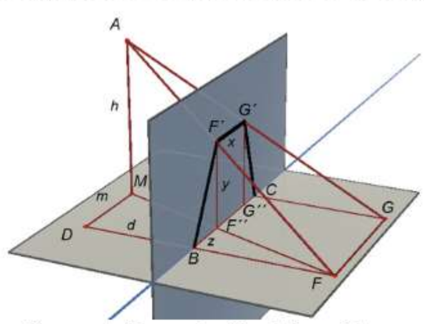


Figura 4. Formulación del problema

La construcción de Piero consta de tres partes independientes que después se integran en un único esquema. El orden en el que se desarrollen las tres partes carece por completo de importancia. La primera parte determina las dimensiones que debe tener el segmento superior –*F'G'*, *x*. La segunda parte determina la altura del trapecio –*F"F'*,*y*. La tercera parte, integrada en su desarrollo a la primera, determina la deformación del trapecio –*BF"*, *z*. Las tres partes se integran para producir el trapecio final.

Primera parte. Imaginemos, por ahora, que la altura del observador se reduce hasta coincidir con el punto *M*; es decir, el observador está también en el plano de base.[16] Se puede ver que, sin importar cuál es la magnitud del segmento *DM*, en todos los casos la longitud de *F"G"* es la misma y depende únicamente de la longitud de los lados del cuadrado y de la distancia *DB*. La demostración, que Piero omite, es muy simple y procede como sigue –Figura 5–. Sean *BC, CG, GF, FB* los lados de un cuadrado, cada uno de ellos de longitud *L*. Los triángulos *MGF* y *MG"F"* son semejantes y por lo tanto:

$$(1)\ \frac{x}{L} = \frac{d}{L+d}$$

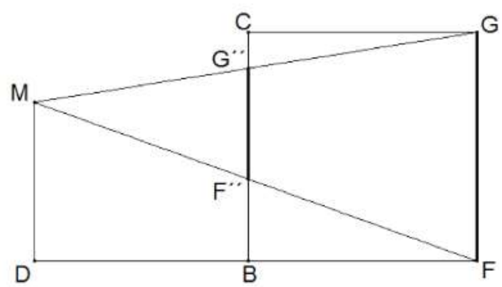


Figura 5. Degradación de GF

Del resultado se infiere que la longitud *x* es independiente de *m*. El teorema, aun cuando Piero no lo advierte, también se puede leer en dirección inversa, esto es: dado un segmento fijo *GF* y una recta paralela *BC* a una distancia *L*, ocurre que todos los segmentos *F"G"* de longitud *x* que se tiendan sobre *BC* lo harán de tal manera que las rectas *GG"* y *FF"* se encuentren en puntos que equidistan de *BC*. Piero aduce que desde el punto de vista de *M*, *F"G"* se apreciará como si aparentara el mismo tamaño que *FG*, toda vez que el ángulo de contemplación es el mismo. Piero se adecúa, entonces, al principio central de Euclides que sugiere que el tamaño aparente de los objetos contemplados depende de la amplitud angular de la pirámide visual. Este predicamento euclidiano se presenta como la proposición II del libro I del *De Prospectiva*. Transcribo a continuación la explicación de Piero ajustando la nomenclatura a la que estoy empleando: «Y la misma proporción de [F"G"] a [FG] es [dada por] [MF"] a [MF]…[17] Y cuando las distancias y las cosas están en la misma proporción como la altura del ojo y la cosa tal y como es degradada, es claro que la degradación es correcta» (1984, p. 76).

[16] En esta posición, todos los objetos en el plano de base degradan en segmentos sobre la línea de base.

[17] Es claro que *MF"* y *MF* están en la misma proporción que *DB* y *DF*.

Piero tendría que demostrar también que la longitud de la degradación de *FG* –a saber, *F'G'*– es igualmente independiente de la altura del observador –es decir, de *MA*. Piero no ofrece argumentación alguna para deducir dicho resultado. Sin embargo, se trata de un resultado que se defiende con facilidad. El protocolo de Piero permite, pues, hallar las dimensiones del segmento *F'G'* del trapecio que ha de representar en forma degradada al cuadrado *BCFG* para un observador a distancia *d* del velo pictórico independientemente de su altura y de su ubicación *DM*. Esto resuelve el primer componente de la tripleta buscada.

Segunda parte. Tratemos de establecer, pues, la altura del trapecio. Si ahora, sin cambiar la altura del observador, movemos *M* hasta confundirlo con *D*, el corte *F''* coincide ahora con *B*. La recta *AF* corta al velo pictórico en un punto F_o de tal manera que, de acuerdo a la conjetura de Piero, BF_o determina la altura del trapecio –Figura 6–. Para defender la propuesta, Piero acude a dos argumentos inspirados en la óptica de Euclides: (i) si dos rectas paralelas, en este caso *BC* y *FG*, son perpendiculares a una tercera, en este caso *DF*, y a partir de *D* se traza una perpendicular al plano de las otras rectas para establecer sobre ella la posición de un observador, en este caso *A*, ocurre que desde *A* se percibe al segmento *FG* –el más alejado– por encima de la percepción de *BC* (1984, pp. 69-70).[18] (ii) *BF*, visto desde *A*, tiene la misma apariencia que BF_o porque ambos se contemplan bajo el mismo ángulo (P. della Francesca, 1984, p. 67).[19] Sea $BF_o = y$, de la semejanza de los triángulos *ADF* y F_0BF se impone:

$$(2)\quad \frac{h}{y} = \frac{L+d}{L}$$

Si las transversales degradan en transversales (asunto que no demuestra Piero), la altura del trapecio es independiente de la magnitud *m*. Esto resuelve el segundo componente de la tripleta buscada.

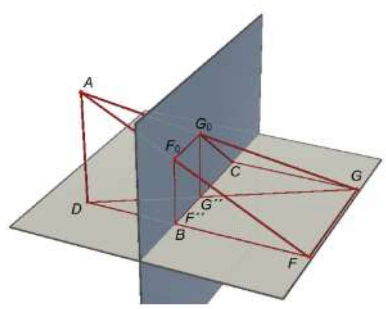


Figura 6. Altura del trapecio

Piero reúne después las dos construcciones anteriores en una sola figura y sugiere su método particular para degradar un cuadrado –Figura 7–. Presento a continuación la síntesis respetando la nomenclatura que he propuesto. El lector debe estar atento al cambio de papel que desempeña la hoja sobre la que se hace el dibujo: en cada caso representa un plano diferente.

18 Cfr. Euclides 2000, prop. 10, pp. 144-145. Este es un caso en el que Euclides usa la proyección del objeto sobre una superficie plana.

19 Cfr. Euclides, 2000, def. 4, p. 135.

El papel visto como un plano perpendicular tanto al plano de base como al velo pictórico. Piero asume que la recta *DBF* es una ortogonal al velo pictórico, con *DB=d*, y que el segmento perpendicular *DA* representa la altura del observador, *h*. Hallamos ahora el corte de *AF* con la perpendicular por *B*, sea este corte el punto F_0. De acuerdo a la conjetura de Piero, BF_0 define la altura del trapecio que ha de representar el cuadrado degradado.

El papel visto como velo pictórico. Dada la nueva función del papel, rebautizamos el punto *F* como punto *C* y asumimos *BC* como línea de base. Trazamos ahora una paralela a *BF* por F_0, y fijamos así la altura a la que debe aparecer el segmento *F'G'*.

El papel visto como plano de base. Imaginamos el cuadrado en sus dimensiones originales *BFGC*, *BC* la línea de base.[20] A partir de *A* trazamos las rectas *AF* y *AG* para determinar los cortes con *BC*, a saber: *F''*, *G''*. De acuerdo al teorema recogido en la ecuación (1), es claro que la longitud del segmento *F''G''* determina la longitud del segmento superior del trapecio que estamos buscando. Ya sabemos que este resultado es independiente de la magnitud del segmento *DM* –Figura 4– y, por esa razón, la evaluación puede hacerse con un segmento que coincida con *DA*.

El papel nuevamente visto como velo pictórico. Sobre la paralela por F_0 a la línea de base, que demanda rebautizar nuevamente el punto *F* como punto *C*,[21] escogemos un punto *F'* (cuyas características aclararé más adelante) y a partir de él construimos el segmento *F'G'* de idéntica longitud que *F''G''*. El trapecio *BF'G'F* muestra la representación pictórica en el velo de proyección. Así entonces, se puede formular a manera de conjetura que el trapecio *BF'G'C* es la presentación de un cuadrado degradado para un observador que se encuentra a una distancia *d* del velo y tiene una altura *h*. Es complejo seguir la síntesis de Piero porque hay que estar atento al cambio de papel que desempeñan los segmentos *BC* y *BF-C*.

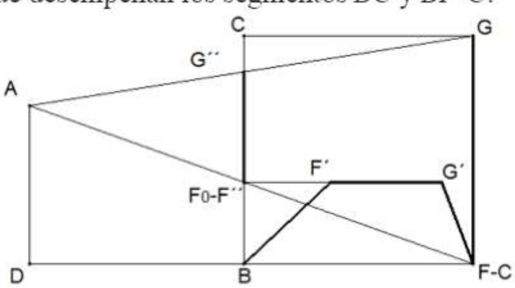


Figura 7. Síntesis de Piero

Piero muestra que si se prolongan *BF'* y *FG'* ellos se cortan en un punto *I* que se encuentra a la misma altura del punto *A* –Figura 8–. De este resultado parece desprenderse un fundamento para la convergencia de las ortogonales.[22]

[20] El punto *F* recupera el papel inicial.

[21] Este ejercicio se facilita toda vez que *BC* ≅ *BF*

[22] Este es el primer principio de la perspectiva lineal advertido por Panofsky (véase la nota 6 del presente artículo)

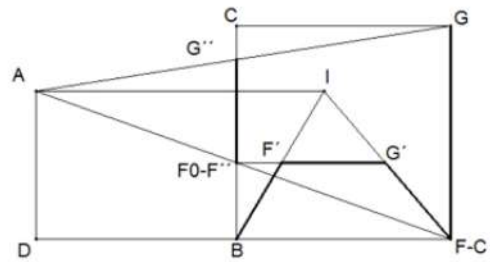


Figura 8. Convergencia de las ortogonales

Tercera parte. ¿Cómo establecer, ahora, la elección de *F'*? Piero no dice nada al respecto, y no tiene por qué hacerlo pues su exposición se limita a sugerir, como un caso particular, que *I* se encuentra en una posición intermedia. El pintor asume que la extensión a otros casos es un asunto trivial. Aunque no haya una solución en *De prospectiva*, no resulta complejo imaginar una. Podemos replicar el esquema de la síntesis y representar ahora el punto *M* sobre *DA* de tal manera que *DM* coincida con la distancia desde los pies del observador a la recta *DC* –es decir *z*, Figura 4–; en este caso el papel representa primero el plano de base y, a continuación, el velo pictórico. Trazamos *MF* y determinamos el corte *E* con *BC*. Por último, escogemos *F'* de manera que $F_0F' \cong BE$. Cualquier punto *I* sobre una paralela a *BC* que pase por *A* sirve como un posible punto de convergencia de las ortogonales. La elección particular de *I* está determinada por la distancia desde los pies del observador a la recta *DC*. Esto resuelve el tercer componente de la tripleta buscada.

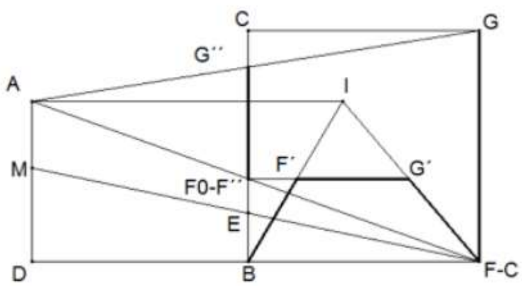


Figura 9. Elección de F'

Ahora que sabemos degradar un cuadrado de acuerdo a la regla de proyección de Piero della Francesca, imaginemos dos segmentos congruentes *AB* y *CD* tendidos sobre el plano de base en una distribución transversal –Figura 10–. *O* define la ubicación de un observador de altura *OH* ubicado a una distancia *HE* del velo pictórico.[23] Con el ánimo de simplificar la exposición, imaginaré que *HA = 2HE*, *HC = 4HE*, esto es, *CD* se encuentra dos veces más lejos del observador que *AB*. Teniendo en cuenta el protocolo de construcción perspectiva de Piero, es claro que

[23] Es importante que el lector advierta que, visto desde arriba, *OH* no representa la altura del observador, sino la ubicación de los pies del observador con respecto a la ortogonal *EC*. Sin embargo, como mostramos en la primera parte de la exposición del método general del escorzo de Piero, las magnitudes de *A'B'* y *C'D'* son independientes de la longitud *OH*. Así entonces, podemos tomar *OH* con las mismas dimensiones de la altura del observador sin que ello cambie las conclusiones.

A'B' y *C'D'* definen las longitudes adecuadas de los segmentos *AB* y *CD* en el velo pictórico. La explicación de lo anterior deviene del hecho de que los segmentos *AB* y *A'B'* se contemplan bajo el mismo ángulo desde el punto *O*; así como ocurre con los segmentos *CD*, *C'D'* –Definición 4 de Euclides–. Ahora bien, es claro que $A'B' = 2C'D'$ así como $HA = HC/2$; en otras palabras: las longitudes que han de representar segmentos paralelos de idéntica longitud guardan entre sí la misma proporción que el inverso de las distancias al observador –como exige la perspectiva lineal–. También es claro que $\angle B'OA' \neq 2\angle D'OC$ como demanda la proposición 8 de Euclides. Como vimos en el apartado anterior, en la construcción de Piero se construyen $A''B'' \cong A'B'$ y $C''D'' \cong C'D'$ como los escorzos buscados de los segmentos *AB* y *CD*. La representación en escorzo preserva entonces la exigencia de la perspectiva lineal, a saber $A''B'' = 2C''D''$ ya que representan objetos de idéntica longitud ubicados de tal manera que *CD* se encuentra, con respecto al observador, dos veces más lejos que *AB*. También preserva el hecho de que la apariencia euclidiana de *AB* –ángulo *A'OB'*– no guarda la proporción inversa con la apariencia euclidiana de *CD* –ángulo *C'OD'*–. Es importante anotar que, si bien en la representación en escorzo ocurre que $A''B'' = 2C''D''$, no es cierto que $EC'' = 2EA''$. Es decir, las dimensiones de la representación de objetos ortogonales no decrece al mismo ritmo que las dimensiones de la representación de objetos transversales.[24]

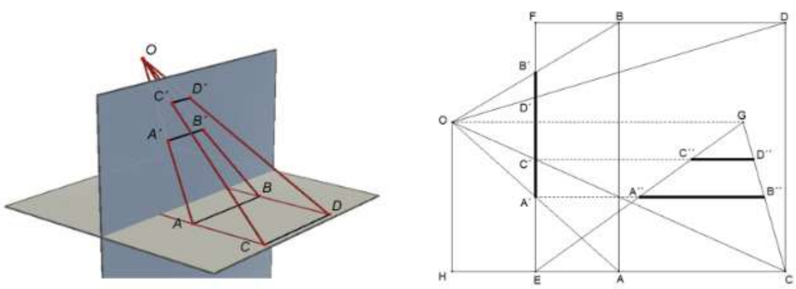


Figura 10. Escorzo de Piero della Francesca

La confusión de Panofsky se origina por creer que las apariencias ("magnitudes") a las que alude Euclides remiten a la longitud de objetos físicos (imágenes) que se constituyen en el correlato de nuestra percepción: objetos que contemplamos de primera mano en un escenario y que fungen como sustitutos de objetos que existen allende dichos escenarios y, por ello, no pueden ser objeto de contemplación directa. Cuando en realidad Euclides alude, más bien, a la amplitud angular de la pirámide visual. En otras palabras, percibir parece ser, a los ojos de Panofsky, una relación que se establece entre un observador peculiar y una imagen que copia isomórficamente las longitudes de un objeto. Cuando imaginamos un objeto dado, objeto que despliega un proceso de multiplicación de sus especies, nos esforzamos a continuación por estudiar cómo es que finalmente se recogen las especies de dicho objeto, bien sea en la cara posterior del cristalino o en la retina, y llegamos a creer que allí se inicia un segundo proceso de contemplación llevado a cabo por un segundo observador que

[24] No obstante, es factible modificar la métrica para que en el espacio de la degradación pictórica se reconozca que las dimensiones de objetos transversales disminuyan al mismo ritmo con el que se incrementan las distancias ortogonales.

ahora no es un observador físico y que tiene en su horizonte, ya no al objeto inicial sino a una imagen del primero. Ver, ya no es entrar en contacto directo con un objeto, es entrar en relación con una imagen[25] suya recogida en un telón o escenario. Esta figura está bellamente recogida en el segundo observador que supone Leonardo –Figura 12 (Leonardo da Vinci, 1968)–.

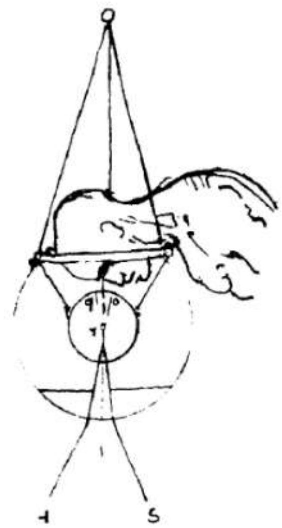


Figura 12. Leonardo, 1968, § 20

4. Referencias bibliográficas

Brownson, C. D. (1981): "Euclid's optics and its compatibility with linear perspective", *Archive for History of Exact Sciences,* 24, 3: 165-194, (http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00357417).

Elkins, J. (1988): "¿Did Leonardo Develop a Theory of Curvilinear Perspective?: Together with Some Remarks on the 'Angle' and 'Distance' Axioms", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 51: 190-196.

Euclides (2000): Óptica, Madrid, Editorial Gredos.

Francesca, Piero della (1984): *De Prospetiva Pingendi*, Firenze, Casa Editrice Le Lettere.

Kepler, Johannes. (2000): *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, Santa Fe, Green Lion Press.

Panofsky, Erwin (2003): *La perspectiva como forma simbólica*, Barcelona, Tusquets Editores.

Proclo (1970): *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton, Princeton University Press.

Tobin, R. (1990): "Ancient Perspective and Euclid's Optics", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes,* 53: 14-41.

Vinci, Leonardo da (1968): *Manuscript D in The Biblioteque de l'institut de France*. Ver D. S. Strong, Leonardo da Vinci on the Eye: the MS D in The Biblioteque de l'institut de France, Paris translated into English and annotated with a study of Leonardo's theories of optics. Doctoral disertación, California University.

[25] Kepler diría "pintura".

Vinci, Leonardo da (1970): *The Literary Works of Leonardo da Vinci*, New York, Phaidon Publishers Inc.

Vitrubio (1949): *Los diez libros de Arquitectura*, Madrid, Alianza Editorial.

White, J. (1949): "Developments in Renaissance Perspective: I", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes,* 12: 58-79.